Zadanie 1

Niech X_n będzie n-wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na kuli w $\mathbb{R}^n$ o środku 0 i promieniu 1. Niech R_n będzie odległością X_n od 0.

a) Wykazać, że R_n zbiega do 1 według prawdopodobieństwa.

b) Czy ciąg $Y_n = n(1 - R_n)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

Rozwiązanie: Niech $B_n(0, r)$ oznacza kulę w $\mathbb{R}^n$ o środku 0 i promieniu r, zaś λ_n – miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$. Dystrybuantę zmiennej R_n oznaczmy przez F_n. Wówczas z własności skalowania dla λ_n, otrzymujemy

$$F_n(t) = \mathbb{P}(R_n \leqslant t) = \frac{\lambda_n(B_n(0,t))}{\lambda_n(B_n(0,1))} = t^n$$

dla $t \in [0, 1]$. Oczywiście $F_n(t) = 0$ dla $t < 0$ oraz $F_n(t) = 1$ dla $t > 1$.

a)

Dla dowolnego $\varepsilon \in)(0, 1)$ zachodzi

$$\mathbb{P}(|R_n - 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}(R_n < 1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \to 0$$

dla $n \to \infty$. Zatem R_n zbiega do 1 według prawdopodobieństwa.

b) Oznaczmy $Z_n = n(1 - R_n)$. Dla dowolnego $t \geqslant 0$ oraz dostatecznie dużych n mamy

$$F_{Z_n}(t) = \mathbb{P}(Z_n \leqslant t) = \mathbb{P}(R_n \geqslant 1 - t/n) = 1 - (1 - t/n)^n \to 1 - e^{-t}.$$

Oczywiście dla $t < 0$ mamy $F_{Z_n}(t) = 0$.

Stąd F_{Z_n} zbiegają punktowo do dystrybuanty rozkładu wykładniczego z parametrem 1, a zatem Z_n zbiega według rozkładu do $Exp(1)$.

Zadanie 2

Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$.

a) Niech $Z_n = (X_n, Y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, będą dwuwymiarowymi wektorami losowymi, takimi że X_n oraz Y_n mają rozkład μ. Wykazać, że z ciągu $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ można wybrać podciąg zbieżny według rozkładu.

b) Załóżmy, że miara probabilistyczna μ ma tę własność, że każdy ciąg $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ dwuwymiarowych wektorów losowych $Z_n = (X_n, Y_n)$, taki że jego współrzędne X_n i Y_n mają dla każdego n rozkład μ, jest zbieżny według rozkładu. Wykazać, że $\mu = \delta_a$ dla pewnej liczby $a \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie a) Ustalmy dowolne $\varepsilon \in (0, 1)$. Z ciasności jednoelementowej rodziny μ wynika, że istnieje zbiór zwarty $K \subseteq \mathbb{R}$, taki że $\mu(K) > 1 - \varepsilon/2$. Zauważmy, że

$$\mathbb{P}(Z_n \notin K \times K) \leqslant \mathbb{P}(X_n \notin K) + \mathbb{P}(Y_n \notin K) = 2\mu(K^c) < 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Zatem

$$\mathbb{P}((X_n, Y_n) \in K \times K) > 1 - \varepsilon.$$

Wnioskujemy stąd, że rodzina rozkładów $\{\mu_{Z_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest ciasna, a więc z twierdzenia Prochorowa z ciągu Z_n można wybrać podciąg zbieżny.

b) Oznaczmy przez F dystrybuantę miary μ i załóżmy, że μ nie jest skupiona w punkcie. Zatem istnieje $a \in \mathbb{R}$ o tej własności, że $0 < F(a) < 1$. W szczególności jeśli X jest zmienną o rozkładzie μ, to $\mathbb{P}(X \leqslant a), \mathbb{P}(X > a) > 0$. Rozważmy teraz dwie niezależne zmienne X, Y o rozkładzie μ i zdefinijumy $Z_n = (X, Y)$ dla n parzystych oraz $Z_n = (X, X)$ dla n nieparzystych. Zauważmy, że rozkład Z_1 jest różny od rozkładu Z_2. Rzeczywiście

$$\mu_{Z_1}((-\infty, a] \times (a, \infty)] = \mathbb{P}(\{X \leqslant a\} \cap \{X > a\}) = 0,$$

zaś

$$\mu_{Z_2}((-\infty, a] \times (a, \infty)] = \mathbb{P}(X \leqslant a, Y > a) = \mathbb{P}(X \leqslant a)\mathbb{P}(Y > a) > 0.$$

Zatem naprzemienny ciąg złożony z wektorów Z_1, Z_2 nie może być zbieżny według rozkładu, co kończy dowód.

1. Niech $\varphi(t) = \frac{1}{3}e^{-12t^2} + \frac{2}{3}\cos(2t)$.

(a) Wykazać, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej.

(b) Niech $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ będzie takim ciągiem zmiennych losowych, że dla każdego $t > 0$ zachodzi
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi(t),$$
gdzie φ_{Z_n} oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej Z_n. Czy ciąg $(\mathbb{E}e^{-Z_n^2})_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny? Jeśli tak, wyznaczyć granicę, a w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

Rozwiązanie.

(a) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(0,24)$, Y – zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym symetrycznym skupionym na $\{-2,2\}$, zaś U – niezależną od X, Y zmienną losową o rozkładzie: $\mathbb{P}(U=1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(U=0) = \frac{2}{3}$. Wówczas $Z = UX + (1-U)Z$ ma funkcję charakterystyczną φ_Z równą
$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}e^{itZ} = \mathbb{E}e^{itZ}\mathbb{1}_{U=1} + \mathbb{E}e^{itZ}\mathbb{1}_{U=0} = \mathbb{E}e^{itX}\mathbb{1}_{U=1} + \mathbb{E}e^{itY}\mathbb{1}_{U=0}$$
$$\overset{\text{nzal.}}{=} \frac{1}{3}\mathbb{E}e^{itX} + \frac{2}{3}\mathbb{E}e^{itY} = \frac{1}{3}e^{-12t^2} + \frac{2}{3}\cos(2t) = \varphi(t),$$
z czego wynika, że φ istotnie jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej – w dodatku Z jest taką zmienną losową.

(b) Dla funkcji charakterystycznych ψ zachodzi $\psi(t) = \overline{\psi(-t)}$ oraz $\psi(0) = 1$. Ponieważ φ_{Z_n} i φ są funkcjami charakterystycznymi, to dla $t < 0$ na mocy naszego założenia zachodzi więc
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi_{Z_n}(-t)} = \overline{\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(-t)} = \overline{\varphi(-t)} = \varphi(t)$$
oraz
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = \varphi(0),$$
więc własność
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi(t)$$
zachodzi dla każdego $t \in \mathbb{R}$, a nie tylko dla $t > 0$. Ponieważ funkcja graniczna φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej Z, to jest ciągła w zerze, więc na mocy twierdzenia Lévy'ego-Craméra ciąg $(Z_n)_n$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej Z, czyli dla każdej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłej i ograniczonej zachodzi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(Z_n) = \mathbb{E}f(Z)$. Ponieważ zaś funkcja $x \mapsto e^{-x^2}$ jest ciągła i ograniczona (z dołu przez 0, a z góry przez 1), to ciąg $(\mathbb{E}e^{-Z_n^2})_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny do $\mathbb{E}e^{-Z^2} \in [0,1]$. Poza tym, skoro X ma taki sam rozkład jak $\sqrt{24}G$, gdzie $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, to
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{-Z_n^2} = \mathbb{E}e^{-Z^2} = \frac{1}{3}\mathbb{E}e^{-X^2} + \frac{2}{3}\mathbb{E}e^{-Y^2} = \frac{1}{3}\mathbb{E}e^{-24G^2} + \frac{2}{3}\mathbb{E}e^{-4}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-24x^2}e^{-x^2/2}\,dx + \frac{2}{3e^4} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-49x^2/2}\,dx + \frac{2}{3e^4}$$
$$= \frac{1}{3\cdot 7}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx + \frac{2}{3e^4} = \frac{1}{21} + \frac{2}{3e^4}. \qquad \square$$

Rozwiązania zadania 4. z kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II, semestr zimowy 2023/2024

Zadanie 4. Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$, taki że zmienna X_k ma rozkład wykładniczy z parametrem $1/k$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Czy ciąg zmiennych losowych

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}}$$

jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

Mamy tutaj do czynienia z ciągiem niezależnych zmiennych losowych o różnym rozkładzie, co sugeruje, aby spróbować sprawdzić warunek Lindeberga lub jakiś warunek go implikujący, np. warunek Lapunowa (tym samym otrzymując zbieżność Z_n do rozkładu normalnego). Sprawdzenie warunku Lapunowa jest w naszym przypadku prostsze, ale przedstawimy oba rozwiązania.

W obu poniższych rozwiązaniach przyjmujemy $s_n = \sqrt{\operatorname{Var} S_n}$. Ze znanych nam własności rozkładu wykładniczego wynika, że jeśli $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, to $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbb{E}X^2 = \frac{2}{\lambda^2}$ oraz $\mathbb{E}X^3 = \frac{6}{\lambda^3}$. W szczególności dla dowolnych $k, n \geqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}X_k = k, \\
&\operatorname{Var} S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var} X_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\
&\mathbb{E}X_k^3 = 6k^3,
\end{aligned}$$

gdzie do obliczenia wariancji S_n wykorzystaliśmy niezależność zmiennych X_k.

Rozwiązanie pierwsze – warunek Lapunowa. Jeśli dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_k - \mathbb{E}X_k\right|^{2+\delta} = 0,$$

to spełniony jest warunek Lapunowa, co implikuje, że spełniony jest warunek Lindeberga. Wówczas zmienne

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n}$$

zbiegają według rozkładu do $\mathcal{N}(0,1)$. Pokażemy, że warunek Lapunowa jest spełniony z $\delta = 1$, co zakończy zadanie.

Mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_k - \mathbb{E}X_k\right|^3 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_k^3 - 3X_k^2\,\mathbb{E}X_k + 3X_k(\mathbb{E}X_k)^2 - (\mathbb{E}X_k)^3\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{E}X_k^3 + 3\mathbb{E}X_k^2\cdot\mathbb{E}X_k + 3\mathbb{E}X_k\cdot(\mathbb{E}X_k)^2 + (\mathbb{E}X_k)^3\right).$$

Zauważmy teraz, że każdy z wyrazów w powyższej sumie jest równy co najwyżej Ck^3 dla pewnej stałej $C > 0$, w związku z czym

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_k - \mathbb{E}X_k\right|^3 \leqslant C\sum_{k=1}^{n} k^3 = O(n^4)$$

przy $n \to \infty$, gdzie skorzystaliśmy z elementarnych własności sum typu $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$. Jednocześnie

$$s_n^3 = (\mathrm{Var}S_n)^{3/2} = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^{3/2} = \Theta(n^{9/2})$$

Stąd mamy

$$\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_k - \mathbb{E}X_k\right|^3 = O(n^{4-9/2}) = O(n^{-1/2}) \to 0$$

przy $n \to \infty$, co chcieliśmy pokazać.

Rozwiązanie drugie – warunek Lindeberga. Chcemy sprawdzić, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi warunek Lindeberga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left((X_k - \mathbb{E}X_k)^2\,\mathbb{1}_{\{|X_k - \mathbb{E}X_k| > \varepsilon s_n\}}\right) = 0,$$

co jak poprzednio będzie implikowało, że zmienne Z_n zbiegają według rozkładu do $\mathcal{N}(0,1)$.

Zmienna losowa X_k ma gęstość $g_k(x) = \frac{1}{k}e^{-\frac{x}{k}}\mathbb{1}_{\{x \geqslant 0\}}$, stąd obliczamy

$$\mathbb{E}\left((X_k - \mathbb{E}X_k)^2\,\mathbb{1}_{\{|X_k - \mathbb{E}X_k| > \varepsilon s_n\}}\right) = \int\limits_{\{|x-k| > \varepsilon s_n\}} (x-k)^2\cdot\frac{1}{k}e^{-\frac{x}{k}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{k}\int\limits_{0}^{(k-\varepsilon s_n)\vee 0} (x-k)^2 e^{-\frac{x}{k}}\,dx + \frac{1}{k}\int\limits_{k+\varepsilon s_n}^{\infty} (x-k)^2 e^{-\frac{x}{k}}\,dx$$

Wyliczenie powyższych całek daje nam

$$\frac{1}{k}\int\limits_0^{(k-\varepsilon s_n)\vee 0}(x-k)^2e^{-\frac{x}{k}}\,dx=\left[k^2-e^{-\frac{k-\varepsilon s_n}{k}}\left((k-\varepsilon s_n)^2+k^2\right)\right]\mathbb{1}_{\{k\geqslant\varepsilon s_n\}},$$
$$\frac{1}{k}\int\limits_{k+\varepsilon s_n}^{\infty}(x-k)^2e^{-\frac{x}{k}}\,dx=e^{-\frac{k+\varepsilon s_n}{k}}\left((k+\varepsilon s_n)^2+k^2\right).$$

Zwróćmy uwagę, że przy $n\to\infty$ mamy $s_n\geqslant cn^{3/2}$ dla pewnego $c>0$ i jednocześnie $k\leqslant n$, zatem przy ustalonym $\varepsilon>0$ warunek $\{k\geqslant\varepsilon s_n\}$ nie będzie spełniony dla dostatecznie dużych n dla żadnego k. Stąd też pierwszą z powyższych całek możemy pominąć przy sprawdzaniu warunku Lindeberga. Znów korzystając z faktu, że $cn^{3/2}\leqslant s_n\leqslant Cn^{3/2}$ dla pewnych stałych $C,c>0$, możemy drugą z całek oszacować w następujący sposób

$$e^{-\frac{k+\varepsilon s_n}{k}}\left((k+\varepsilon s_n)^2+k^2\right)\leqslant C'n^3e^{-\frac{\varepsilon s_n}{k}}\leqslant C'n^3e^{-c\varepsilon\sqrt{n}},$$

gdzie $C'>0$ to pewna stała zależna być może od ε, ale nie od k.

Wstawiając otrzymane oszacowanie do wyrażenia z warunku Lindeberga otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^n\mathbb{E}\left((X_k-\mathbb{E}X_k)^2\,\mathbb{1}_{\{|X_k-\mathbb{E}X_k|>\varepsilon s_n\}}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^n C'n^3e^{-c\varepsilon\sqrt{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{C'}{c^2n^3}n^4e^{-c\varepsilon\sqrt{n}}=0,$$

co należało pokazać.

Uwaga. Częstym błędem przy próbie skorzystania z warunku Lindeberga było następująco rozumowanie – skoro przy $n\to\infty$ mamy $s_n\to\infty$, to dla ustalonego k i dostatecznie dużych n warunek $\{|X_k-k|>\varepsilon s_n\}$ nie będzie zachodził, zatem w sumie z warunku Lindeberga odpowiednie indykatory będą zerami i granica znormalizowanej sumy będzie równa 0.

Rozumowanie to jest niestety niepoprawne i to z kilku powodów. Po pierwsze, istotnie, *dla ustalonego* ω i ustalonego k mamy, że warunek $|X_k(\omega)-\mathbb{E}X_k|>\varepsilon s_n$ nie zachodzi, jeśli n jest dostatecznie duże, tylko nic z tego nie wynika dla rachunków z warunku Lindeberga, gdyż tam interesuje nas policzenie (obciętych) wariancji. Po drugie, suma w warunku Lindeberga zawiera n składników, więc udowodnienie, że pojedynczy składnik z ustalonym k zbiega do 0 przy $n\to\infty$ niczego nie dowodzi (proszę pomyśleć o sumie typu $\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}$). Tego typu rozumowanie *byłoby poprawne*, gdyby zmienne X_k były wspólnie ograniczone – jeśli $|X_k|\leqslant C$ dla pewnej stałej $C>0$, to wzięcie n na tyle dużego, aby $\varepsilon s_n>C$, zeruje wszystkie indykatory w sumie. W naszym zadaniu tak jednak nie jest i suma w warunku Lindeberga jest nietrywialna.

Rozwiązania zadania 4. z kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II, semestr zimowy 2023/2024

Zadanie 5. Rzucamy kostką do momentu, gdy suma wyrzuconych oczek przekroczy 35300. Obliczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że rzucimy więcej niż 10000 razy.

Jest to treść zadania z grupy A, w grupie B nieco inne były tylko dane liczbowe, więc rozwiążemy zadanie tylko dla grupy A.

Niech X_k oznacza wynik k-tego rzutu kostką. Łatwy rachunek pokazuje, że $\mathbb{E}X_k = \frac{7}{2}$, natomiast

$$\operatorname{Var} X_k = \mathbb{E}X_k^2 - (\mathbb{E}X_k)^2 = \frac{1}{6}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

Warunek z treści zadania oznacza, po przeformułowaniu, że w ciągu pierwszych 10000 rzutów suma wyrzuconych oczek była mniejsza niż 35300. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Dla $n = 10000$ mamy $\mathbb{E}S_n = 10000 \cdot \mathbb{E}X_k = 35000$, natomiast $\operatorname{Var} S_n = n\operatorname{Var} X_k = 100 \cdot \frac{35}{12}$ z niezależności zmiennych X_k. Mamy zatem

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(S_{10000} \leqslant 35300\right) = \mathbb{P}\left(S_{10000} - \mathbb{E}S_{10000} \leqslant 300\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_{10000} - \mathbb{E}S_{10000}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{10000}}} \leqslant \frac{300}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{10000}}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{10000} - \mathbb{E}S_{10000}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{10000}}} \leqslant \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{35}}\right). \end{aligned}$$

Z Centralnego Twierdzenia Granicznego dla zmiennych o jednakowym rozkładzie wiemy, że

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1),$$

w związku z czym dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ możemy przybliżać

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \leqslant t\right) \approx \Phi\left(t\right),$$

gdzie $\Phi(\cdot)$ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego. Zastosowanie powyższego przybliżenia dla $n = 10000$ oraz $t = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$ daje nam, że szukane prawdopodobieństwo jest w przybliżeniu równe $\Phi\left(\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{35}}\right)$.

Zadanie 6

Niech $X_0, X_1, \ldots$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych o funkcji charakterystycznej φ spełniającej $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -3$. Niech ponadto $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

a) Wykazać, że ciąg $M_n = \sum_{i=1}^n X_{i-1}X_i$, $n \geqslant 1$, jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.

b) Znaleźć liczbę α, taką że ciąg $N_n = M_n^2 - \alpha \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2$, $n \geqslant 1$, jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.

Rozwiązanie Na podstawie zadania z ćwiczeń (omawianego we wszystkich grupach) wiemy, że jeśli $\varphi''(0)$ istnieje, to X_0 ma skończony drugi moment. Korzystając z relacji między pochodnymi funkcji charakterystycznej w zerze i jej momentami, otrzymujemy, że $\mathbb{E}X_0 = 0$, $\mathbb{E}X_0^2 = 7$.

a) Zmienna M_n jako borelowska funkcja zmiennych $X_0, \ldots, X_n$ jest oczywiście mierzalna względem $\mathcal{F}_n$, zatem (M_n) jest adaptowany. Z niezależności i całkowalności zmiennych X_i wnioskujemy, że M_n również jest całkowalna. Pozostaje zatem sprawdzić, że $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$.

Mamy $M_{n+1} = M_n + X_nX_{n+1}$, zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n + X_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n)\\ &= M_n + X_n\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n + X_n\mathbb{E}X_{n+1} = M_n + X_n \cdot 0 = M_n,\end{aligned}$$

przy czym skorzystaliśmy z mierzalności M_n i X_n względem $\mathcal{F}_n$, niezależności X_{n+1} od $\mathcal{F}_n$ oraz podstawowych własności warunkowej wartości oczekiwanej. Zatem (M_n) rzeczywiście jest martyngałem.

b) Podobnie jak w punkcie a) uzasadniamy, że (N_n) jest adaptowany. Całkowalność N_n wynika z niezależności i całkowalności z kwadratem zmiennych X_i. Korzystając raz jeszcze z równości $M_{n+1} = M_n + X_nX_{n+1}$ oraz mierzalności i niezależności, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n^2 + 2M_nX_nX_{n+1} + X_n^2X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = M_n^2 + 2M_nX_n\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + X_n^2\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)\\ &= M_n^2 + 2M_nX_n\mathbb{E}X_{n+1} + X_n^2\mathbb{E}X_{n+1}^2 = M_n^2 + 7X_n^2.\end{aligned}$$

Zatem, korzystając z mierzalności $\sum_{i=1}^n X_i^2$ względem $\mathcal{F}_n$, otrzymujemy

$$\mathbb{E}(N_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - \alpha\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = M_n^2 - \alpha\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 + (7-\alpha)X_n^2 = N_n + (7-\alpha)X_n^2,$$

skąd widzimy, że dla $\alpha = 7$ ciąg (N_n) jest martyngałem. Nie jest on martyngałem dla innych α, gdyż X_n nie jest stale równa zero (średnia wynosi 7).